



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

ساعت امتحان: دوره اول و دوم صبح و عصر
وقت امتحان: ۶۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۸
تعداد برگ سؤال: یک برگ

نام واحد آموزشی: دبیرستان غیر دولتی هاتف (دوره دوم)
نام و نام خانوادگی: پایه: چهارم
امتحان درس: دیفرانسیل
نوبت امتحانی: دی ماه
رشته: ریاضی
نام دبیر: آقای ناری
سال تحصیلی: ۹۶ - ۹۵

۱- دنباله‌ی اعداد $1/45, 1/4545, 1/454545, \dots$ به عدد ثابت و گویای a بسیار نزدیک می‌شود. عدد a کدام است؟ (۱نمره)

۲- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|3x + a| < b$ یک همسایگی متقارن به مرکز ۲ و شعاع ۱ می‌باشد. $a + b$ کدام است؟ (۱نمره)

۳- به ازای مقادیر $n_0, n \geq n_0$ ، اگر فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی $\left\{ \frac{4n+1}{3n-2} \right\}$ از نقطه‌ی همگرایی خود، کم‌تر از $0.2/0.1$ باشد، کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟ (۱نمره)

۴- در مورد همگرایی، کران داری و یکنوایی (صعودی یا نزولی) دنباله‌های زیر توضیح دهید. (۳نمره)

الف. $\{n(-1)^n\}$ ب. $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$ ج. $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right\}$

۵- بزرگترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای دنباله‌ی $\left\{ \sqrt{n^2 + 3n} - n \right\}$ کدام است؟ (۱نمره)

۶- مطلوب است محاسبه‌ی حدود زیر: (۵نمره)

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [3 - 2^x]$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cot x$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ ۴) $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$
۵) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 3}}$

۷- به کمک دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x-2}$ در $x = 2$ ، حد ندارد. (۱نمره)

۸- تابع $f(x) = [2 \cos x]$ در نقطه‌ی $x = 0$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (۱نمره)

۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است. نمودار این تابع، خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (۲نمره)

۱۰- تابع $f(x) = [x^2]$ در بازه‌ی $[-1, 2]$ ، در چه نقاطی ناپیوسته است؟ (۱نمره)

۱۱- کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^3 - 12x + 1 = 0$ در کدام فاصله قرار دارد؟ (۱نمره)

(۱) $\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{13}, \frac{1}{12}\right)$

(۳) $\left(\frac{2}{23}, \frac{1}{11}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{12}, \frac{2}{23}\right)$

۱۲- معادله‌ی مجانب‌های توابع زیر را تعیین کنید. (۲نمره)
۱) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 3}$ ۲) $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x}$

پاسخ سؤالات در روی برگ سؤال نوشته شود، نیاز به پاسخ‌نامه سفید ندارد. پاسخ‌نامه سفید داده شود.

۱ از نامساوی $a > b^2$ درستی کدام نامساوی زیر را نمی‌توان نتیجه گرفت؟

- (۱) $a^{-1}b^2 < 1$
 (۲) $a^3 > a^2b^2$
 (۳) $ab^2 > b^6$
 (۴) $a^2 > b^6$

۲ مجموعه جواب نامعادله $|x| < x + 4$ به صورت $(-\infty, a)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) -1
 (۲) صفر
 (۳) 1
 (۴) 2

۳ مجموعه جواب نامعادله $|x + 2| < a|x|$ به صورت $(-\infty, b)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) 1
 (۳) -1
 (۴) $-\frac{1}{2}$

۴ دنباله $a_n = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ چگونه است؟

- (۱) واگرا - کران دار - نزولی
 (۲) همگرا - کران دار - صعودی
 (۳) همگرا - کران دار - غیریکنوا
 (۴) همگرا - کران دار - نزولی

۵ دنباله $a_n = [3^n \sin(\frac{\pi}{2^n})]$ به چه عددی همگرا است؟

- (۱) واگرا است
 (۲) 3
 (۳) 4
 (۴) 2

۶ در ۲۰ جمله اول دنباله $\left\{n + 3\left[-\frac{n}{3}\right]\right\}$ چند جمله منفی یافت می‌شود؟

- (۱) 20
 (۲) 18
 (۳) 16
 (۴) 14

۷ برای هر $n \geq M$ فاصله جملات دنباله $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\}$ از نقطه همگرایی آن از $\frac{1}{30}$ کمتر است. حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

- (۱) 9
 (۲) 10
 (۳) 11
 (۴) 12

۸ به ازای چند مقدار صحیح a دنباله $\left\{n + \frac{a}{2}(-1)^n\right\}$ یکنوا است؟

- (۱) یک
 (۲) دو
 (۳) سه
 (۴) بیشمار

۹ اگر $a_n = (2n+1)^n$ باشد دنباله $\left\{\frac{na_n}{a_{n+1}}\right\}$ به چه عددی همگرا است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$
 (۲) $\frac{1}{2e}$
 (۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
 (۴) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$

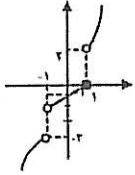
۱۰ دنباله $\left\{\frac{1}{n} \cot \frac{\pi n}{n+1}\right\}$ به چه عددی همگرا است؟

- (۱) $-\frac{1}{\pi}$
 (۲) $\frac{1}{\pi}$
 (۳) π
 (۴) $-\pi$

۱۱ تابع $f(x) = [\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}] + [\sqrt{2} \cot \frac{x}{2}]$ در $x = \pi$ چه نوع پیوستگی دارد؟

- (۱) پیوسته است.
 (۲) فقط پیوستگی راست دارد.
 (۳) فقط پیوستگی چپ دارد.
 (۴) نه پیوستگی راست و نه پیوستگی چپ دارد.

۱۲) نمودار $f(x)$ به صورت زیر است. اختلاف حد چپ و راست تابع $y = f^{-1}(x + [-x])$ در نقطه $x = 1$ چقدر است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۱۳) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \notin Q \\ 3x+a & ; x \in Q \end{cases}$ در دو نقطه با طول‌های ۱ و b حد دارد. مقدار $f(b)$ کدام است؟

۹ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۱۶ (۳)

۱۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1-\sin(\frac{1}{\sqrt{x}} \cos^{-1}x)}$ کدام است؟

۲ (۲)

۴ (۴)

-۲ (۱)

-۴ (۳)

۱۵) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot (a + \cot x)$ برابر مقدار حقیقی b باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲ (۲)

-۲ (۴)

۱ (۱)

صفر (۳)

۱۶) تابع $y = f(x) \cdot \log(x^2 - x)$ در $x = 0$ حد دارد. ضابطه $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟ ($\text{sgn}(x)$ تابع علامت است)

$1 + \text{sgn}(x)$ (۲)

$\text{sgn}(-x^2)$ (۴)

$1 - \text{sgn}(x)$ (۱)

$\text{sgn}(x^2)$ (۳)

۱۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x+2} \right)$ برابر است با:

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۳)

۱۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+|x|} + \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x} \sin x} \right)$ برابر است با:

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱ (۱)

۲ (۳)

۱۹) اگر $f(x) = x \left[\sin \frac{1}{x} \right]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ کدام است؟

۱ (۲)

وجود ندارد. (۴)

۱

صفر (۱)

-۱ (۳)

۲۰) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x^2 + 2x})$ کدام است؟

۳ (۲)

-۳ (۴)

-۱ (۱)

۱ (۳)

۲۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(\sqrt{\tan^2 x - \tan x} + \frac{1}{\cos x} \right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۴)

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱۲۲ تابع $f(x) = \left[\frac{1}{1-2x} \right]$ در بازه $[k, 1)$ پیوسته است. حداقل مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{4}{5}$
 (۴) $\frac{5}{6}$

۱۲۳ به ازای چند مقدار صحیح a معادله $x^2 + 3x + a = 0$ در بازه $[-1, 2]$ ریشه دارد؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۱۱
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۳

۱۲۴ نمودار توابع $f(x) = 2x + \sin x$ و $g(x) = 7 + \cos x$ در کدام بازه زیر یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$
 (۲) $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi \right)$
 (۳) $\left(\pi, \frac{5\pi}{4} \right)$
 (۴) $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right)$

۱۲۵ نمودار تابع $y = \sin^{-1} \frac{x}{x^2+1}$ در مجاورت مجانب افقی آن چگونه است؟



- (۱)
 (۲)
 (۳)
 (۴)

۱۲۶ مساحت مستطیلی که از برخورد مجانب‌های تابع $y = \frac{2x}{x+|3x+4|}$ به وجود می‌آید، چقدر است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

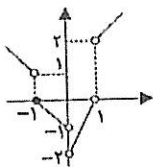
۱۲۷ عرض از مبدأ مجانب مایل تابع $y = \frac{x^2}{x+2} + \sqrt{x^2+2x}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) -۳
 (۴) ۳

۱۲۸ تابع $f(x) = \frac{[2x]}{x+a[x]}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد. مقدار a کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۲۹ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f \circ f(-x^2)$ کدام است؟



- (۱) -۱
 (۲) ۲
 (۳) -۲
 (۴) صفر

۱۳۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 3x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

۱۳۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + \sqrt{3+x^2}}{x^2-1}$ برابر عدد حقیقی b است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $-\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{6}$

حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x [\cot 2x]$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۲
(۴) صفر

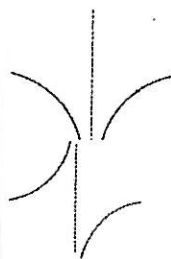
حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 3x}}{x^2}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{7}{2}$
(۴) $\frac{7}{3}$

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(2x)) = 1$ حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2}{2x+1} - f(x))$ برابر است با:

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{3}{3}$

نمودار تابع $y = \frac{2x+2[-x]}{x-1}$ در همسایگی $x=1$ چگونه است؟



- (۱)
- (۲)
- (۳)
- (۴)

مجاانب‌های تابع $y = \frac{2x^2}{x^2 - 3x + 2}$ در نقاط A و B متقاطع‌اند، اندازه پاره‌خط AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) ۲
(۴) ۳

تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x^2 = 2|x| \\ x+2 & ; x^2 \neq 2|x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

- (۱) هیچ
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه

تابع $y = \frac{1}{x^2-x} + \frac{a}{x^2+x}$ فقط دو خط مجانب قائم دارد، مقدار a کدام است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) -۲
(۴) -۱

با فرض $f(x) = \sqrt{2+x}$ عرض از مبدأ مجانب مایل تابع $y = xf(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) صفر

کدام دنباله زیر همگرا و نزولی است؟

- (۱) $a_n = \frac{2n+1}{2n-9}$
(۲) $b_n = \frac{\cos n\pi}{n+2}$
(۳) $c_n = \log \frac{1}{n}$
(۴) $d_n = (\frac{1}{2})^n$

گزینه ۲

دنباله $\sqrt{n^2 + 2n} - n$ به همگرا است.

$$\left| \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1 \right| < \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow n + 1 - \sqrt{n^2 + 2n} < \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 + 2n} > n + \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow n^2 + 2n > n^2 + \frac{2n}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} n > \frac{2n}{\sqrt{10}} \Rightarrow n > \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow n \geq 10$$

گزینه ۳

دنباله به $+\infty$ واگرا است. پس در صورت یکتوان بودن، صعودی است.

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow n + \frac{a}{n} (-1)^n \leq n + 1 + \frac{a}{n+1} (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{n} (-1)^n \leq 1 - \frac{a}{n+1} (-1)^n \Rightarrow a(-1)^n \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a \leq 1 & \text{زوج } n \\ -a \leq 1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

پس $-1 \leq a \leq 1$ بنابراین $a = 0, \pm 1$ است.

گزینه ۲

$$\frac{n a_n}{a_{n+1}} = \frac{n(Y_n + 1)^n}{(Y_n + Y_n^3)^{n+1}} = \frac{n}{Y_n + Y_n^3} \left(\frac{Y_n + 1}{Y_n + Y_n^3} \right)^n = \frac{n}{Y_n + Y_n^3} \left(1 - \frac{Y_n}{Y_n + Y_n^3} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Y_n + Y_n^3} e^{-\frac{Y_n}{Y_n + Y_n^3}} = \frac{1}{Y} e^{-1}$$

گزینه ۱

$$\frac{1}{n} \cot \frac{\pi n}{n+1} = \frac{-1}{n} \cot \left(\pi - \frac{\pi n}{n+1} \right) = \frac{-1}{n} \cot \frac{\pi}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cot \frac{\pi}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \cot \frac{\pi}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \left(\frac{\pi}{n+1} \right)} = -\frac{1}{\pi}$$

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \left[\sqrt{Y} \sin \left(\frac{\pi}{Y} \right)^+ \right] + \left[\sqrt{Y^3} \cot \left(\frac{\pi}{Y} \right)^+ \right]$$

$$= \left[\sqrt{Y} \left(\frac{\sqrt{Y}}{Y} \right)^+ \right] + \left[\sqrt{Y^3} \left(\frac{\sqrt{Y^3}}{Y} \right)^+ \right] = [1]^+ + [1]^+ = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \left[\sqrt{Y} \sin \left(\frac{\pi}{Y} \right)^- \right] + \left[\sqrt{Y^3} \cot \left(\frac{\pi}{Y} \right)^- \right]$$

$$= \left[\sqrt{Y} \left(\frac{\sqrt{Y}}{Y} \right)^- \right] + \left[\sqrt{Y^3} \left(\frac{\sqrt{Y^3}}{Y} \right)^- \right] = [1]^- + [1]^+ = 0 + 1 = 1$$

$$f(\pi) = \left[\sqrt{Y} \sin \left(\frac{\pi}{Y} \right) \right] + \left[\sqrt{Y^3} \cot \left(\frac{\pi}{Y} \right) \right] = 1 + 1 = 2$$

تابع حد دارد ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

پاییننامه در پاسخ اول (ترم اول)

گزینه ۳

به ازای $x = 0$ ، P ، Q ، R ، S به تناقض می‌انجامد. چون $a > 0$ پس گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح‌اند.

گزینه ۳

این رابطه همواره برقرار است پس هر عدد منفی جواب است.

$$x < 0 \Rightarrow (2x + 3)(-x) < x + 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 4 > 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow (2x + 3)(x) < x + 4 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1 \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 1$$

اجتماع دو جواب بالا به صورت $0 < x < 1$ است، یعنی $a = 1$ است.

گزینه ۱

بدیهی است که a نمی‌تواند منفی باشد.

$$|x + 2| < a|x| \Rightarrow (x + 2)^2 < a^2 x^2 \Rightarrow (1 - a^2)x^2 + 4x + 4 < 0$$

جواب هیچ نامعادله درجه دومی به صورت $(-a, b)$ نیست، پس $a = 1$ و $a = 0$ داریم:

$$4x + 4 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a + b = 0$$

گزینه ۴

$$a_n = (n+1) \left(\frac{1}{n} \right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2) \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{(n+1) \left(\frac{1}{n} \right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{n+2}{(n+1)^2} < 1$$

a_n نزولی است پس از بالا کران دار است. جملات دنباله همه مثبت‌اند پس از پایین کران دار است. دنباله یکنوا کران دار است \Leftarrow همگرا است.

گزینه ۳

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |3^n \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |3^n n \left(\frac{\pi}{n} \right)| = \left[\frac{3^n \pi}{n} \right] = 4$$

گزینه ۴

جملات ابتدایی دنباله به صورت زیر است:

$$\dots, 0, -1, 0, 0, -2, 0, 0, 0, -3, \dots$$

به جز جملات a_{2k} و a_{4k} و a_{6k} و a_{8k} و a_{10k} و a_{12k} و a_{14k} و a_{16k} بقیه جملات همگی منفی هستند که تعداد آن‌ها برابر ۴ است.

تابع داده شده در همسانی راست $x = 0$ تعریف شده است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+|x|} + \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x} \sqrt{1-\cos^2 x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1+\cos x}} \right) = 1 + \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$$

گزینه ۴

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sin \frac{1}{x} \right] = +\infty \times \left[0 \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [\sin x] = 0 \times \infty = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)) = 0$$

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{x^y + yx}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + x - \sqrt{x^y + yx})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^y + yx})$$

$$= y + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-yx}{x + \sqrt{x^y + yx}} = y + \frac{-y}{y} = 1$$

گزینه ۳

فرض کنید $a = \tan x$ در این صورت $a = 1 + a^y$ و $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + a^{2y}$ است (دقت کنید در همسانی راست $\frac{0}{0}$ مقدار $\cos x$ منفی است.)

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (\sqrt{\tan^y x - \tan x} + \frac{1}{\cos x}) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\sqrt{a^y - a} - \sqrt{1 + a^y})$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-a-1}{\sqrt{a^y - a} + \sqrt{1 + a^y}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-a-1}{-a-a} = \frac{1}{y}$$

گزینه ۱

تابع $g(x) = \frac{1}{1-x}$ صدودی و $g(1) = -1$ است. حداقل k زمانی است که $-y$ باشد.

$$\frac{1}{1-y^k} = -y \Rightarrow k = \frac{y}{1-y}$$

گزینه ۴

تابع $f(x) = x^y + yx + a$ در بازه $[-1, y]$ صعودی است لذا طبق قضیه بولزانو داریم:

$$f(-1) \leq 0 \Rightarrow (a-y)(a+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq y$$

بنابراین ۱۳ مقدار صحیح برای a یافت می شود

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x + [-x]) = f^{-1}(1^+ + [-1^-]) = f^{-1}(1^+ - 1^-) = f^{-1}(0^-) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x + [-x]) = f^{-1}(1^- + [-1^+]) = f^{-1}(1^- - 1^+) = f^{-1}(0^+) = 1$$

اختلاف دو حد بالا y واحد است.

گزینه ۱

گزینه ۴

$$\begin{cases} x^y = y^y x + a \xrightarrow{x=1} 1 = y^y + a \Rightarrow a = -y^y \\ x^y = y^y x + a \xrightarrow{x=b} b^y = y^y b - y \Rightarrow b^y - y^y b + y = 0 \Rightarrow b = y^y \end{cases}$$

$$f(b) = f(y^y) = y^y + a = y^y - y^y = 0$$

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1+x}{1-\sin\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1+\cos x}{1-\sin\left(\frac{1}{1+x}\right)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-\sin x}{-\frac{1}{1+x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-\cos x}{\frac{1}{1+x}} = 0$$

گزینه ۳

فرض کنید $x^{-1} \cos x = x$ در این صورت داریم $\cos x = x^2$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan^y x (-1 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1 + \cos x}{\cos^y x}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)}{-y(1+\cos^y x)} = \frac{y}{1} = 1$$

پس $a = b = 1$ و لذا $a + b = 2$ است.

گزینه ۲

تابع y در سمت چپ $x = 0$ تعریف شده است.

$$(1 > x > 0 \rightarrow x < 0 \rightarrow x^y > 0 \rightarrow x^y - x > 0 \rightarrow x^y > x)$$

حد بالا زمانی وجود دارد که $f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times (-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times \log^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times (-\infty)$$

حد بالا زمانی وجود دارد که $f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times (-\infty)$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^y} \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^y} \left(\frac{1+y-yx}{x(x+y)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^y} \frac{y(1-x)}{x(x+y)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{y(1-x)}{(1+x)x(x+y)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{y}{x(x+y)} = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = x - \sqrt[3]{x} + \sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$y \approx x - \sqrt[3]{x} + |x+1|$$

مجاذب مایل : $y = x - \sqrt[3]{x} + x + 1 = \sqrt[3]{x} - 1$
 مجاذب افقی : $y = x - \sqrt[3]{x} - (x+1) = -\sqrt[3]{x}$ ($x \rightarrow +\infty$)
 ($x \rightarrow -\infty$)

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-\sqrt[3]{x}}{-1-a} = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-\sqrt[3]{x}}{-1-a} = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+a}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x}}{1+a} = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+a} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f \circ f(-x^2) = f \circ f(-1^+) = f(0) = -1$$

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{y \cos \frac{x}{y}}}{\sin y x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\sqrt{y} \cos \frac{x}{y}}{\sin y x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{\sqrt{y}}{y} \sin \frac{x}{y}}{\frac{y}{y} \cos y x} = -\frac{\sqrt{y}}{y} \frac{\sqrt{y}}{y}$$

گزینه ۳

$$x = 1 \Rightarrow ax + \sqrt{y^2 + x^2} = a + \sqrt{y^2} = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{y^2}$$

برای آنکه حالت مهم : داشته باشیم، باید صورت کسر صفر باشد.

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{y^2 + x^2}}{x^y - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(y^2 + x^2) - F_x y^2}{(x^y - 1)(\sqrt{y^2 + x^2} + yx)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y^2 - y^2 x^y}{F_x(x^y - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-y^2(x+1)}{F_x(x^y + x + 1)} = -\frac{1}{y}$$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x \times \cot yx) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan yx} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2 x}{y(1 + \tan^2 yx)} = \frac{1}{y}$$

نکته: اگر $x \rightarrow \infty$ آنکه $x \sim |x|$.

$$yx + \sin x = y + \cos x \Rightarrow yx + \sin x - \cos x = y$$

تابع $h(x) = yx + \sin x - \cos x$ رابطه در بازه (a, b) رابطه $h(x) = y$ برقرار است که تابع $h(a) < y < h(b)$ پس داریم.

گزینه ۲

$$h\left(\frac{\pi}{y}\right) = \pi + 1 \approx F/1\pi$$

$$h\left(\frac{y\pi}{F}\right) = \frac{y\pi}{y} + \sqrt{y^2} \approx F/1\pi$$

$$h(x) = yx + 1 \approx y/1\pi$$

$$h\left(\frac{y\pi}{F}\right) < y < h(x)$$

پس داریم

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^{-1} \frac{x}{x^y + 1} = 0^+ \Rightarrow$$

نمودار بالای مجانب \Rightarrow

خط $y = 0$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^{-1} \frac{x}{x^y + 1} = 0^- \Rightarrow$$

نمودار زیر مجانب \Rightarrow

گزینه ۳

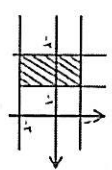
مجاذب‌های افقی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_x}{F_x + F} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_x}{-F_x - F} = -1$$

$$x + |y^2 x + F| = 0 \Rightarrow |y^2 x + F| = -x \Rightarrow y^2 x^2 + 2y^2 x + 1 + F = x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 x + y = 0 \Rightarrow x = -1, -y$$

مجاذب‌های قائم: مساحت مستطیل شکل زیر برابر ۳ است.



$$y = x / (\frac{1}{x}) = x \sqrt{F + \frac{1}{x}} = \sqrt{x^2 F + x} = \sqrt{1 + \frac{1}{F}}$$

$$\text{برزولی: } y = \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})} = \sqrt{x^2 + x}$$

$$1) a_n = \frac{y_{n+1}}{y_n - 9} \quad n = \frac{9}{F} > 1$$

$$2) b_n = \frac{(-1)^n}{n+y} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{\pm 1}{\infty} = 0$$

$$3) c_n = \log \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \log 0^+ = -\infty$$

$$4) d_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

گزینه ۳

گزینه ۴

غیریکنوا و همگرا به یک است.

همگرا به صفر و غیر یکنوا است.

نزولی و واگرا است.

همگرا به صفر و نزولی است.

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - \sqrt{\cos^3 x}}{x^y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cos x - \sqrt{\cos^3 x})(\cos x + \sqrt{\cos^3 x})}{x^y (\cos x + \sqrt{\cos^3 x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{x^y (\cos x + \sqrt{\cos^3 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos^3 x}{x^y (\cos x + \sqrt{\cos^3 x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos^3 x}{x^y} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

گزینه ۱

برای راحتی کار فرض کنید $f(x) = x - 1$ پس $f'(x) = x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^y}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{y} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{y(\sqrt{x+1})} + 1 \right) = -\frac{1}{y} + 1 = \frac{y-1}{y}$$

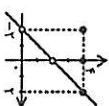
گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{y-1}{y} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{y-1}{y} = -\infty$$

گزینه ۲

قائم: $\begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}$ بردهورد $\begin{cases} A=(1, A) \\ B=(y, 10) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{1+F} = \sqrt{5}$

گزینه ۳



$$x^y = |y|x| \Rightarrow x = 0, \pm y$$

در نقاط $x=0$ و $x=y$ مقدار تابع برابر نیست.

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$$

خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب قائم‌اند زیرا:

برای آنکه $x=0$ مجانب قائم نباشد باید داشته باشیم:

$$y = \frac{x^2 + a - a(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$